BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№3 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2007

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ДЖЕКСОНА-БЕРНШТЕЙНА В L_p НА ЗАМКНУТЫХ КРИВЫХ В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Дж.И.МАМЕДХАНОВ, И.Б.ДАДАШОВА
Бакинский Государственный Университет

Получен общий аналог прямой теоремы Джексона в L_p на замкнутых кривых в комплексной плоскости. При доказательстве используется полиномиальная аппроксимация классов функций $E_p(G)$, а также аппроксимация этих классов посредством аналитических ограниченных функций. Полученные результаты, наряду с применениями в смежных областях теории функций, представляют также и самостоятельный интерес.

Классическая теорема Джексона-Бернштейна, справедливая для периодических функций из класса $Lip_{[0,2\pi]}\alpha$ $(0<\alpha<1)$, утверждает: для того, чтобы $f\in Lip_{[0,2\pi]}\alpha$ необходимо и достаточно, чтобы

$$E_n(f;[0,2\pi])=\inf_{P_n}\|f-P_n\|_{C[0,2\pi]}\le const\cdot n^{-\alpha}.$$

Получению подобных теорем в комплексной плоскости на замкнутых кривых посвящены многочисленные исследования Дж.Уолша*, В.Сьюэла, Рассела [1], С.Я.Альпера [2], С.Н.Мергеляна [3], А.И.Маркушевича [4]. Ответ на задачу Дж.Уолша в метрике $C[0,2\pi]$ была анонсирована в работе Дж.И.Мамедханова [5]. На наш взгляд задача Дж.Уолша актуальна и в метрике $L_p(\Gamma)$.

Данная работа посвящена именно этим вопросам, т.е. теореме Джексона-Бернштейна на замкнутых кривых в комплексной плоскости в метрике $L_p(\Gamma)$. В данной работе, мы рассмотрим более общий случай прямых теорем, из которого в дальнейшем выделим этот частный случай.

Пусть функция $u(z)$ задана на некоторой замкнутой спрямляемой кривой Γ и $L_p(\Gamma,u)$ означает, как обычно, весовое пространство функций f с весом u и с нормой

---

* Дж.Уолш [1] сформулировал следующую задачу: каким необходимым и достаточным условиям должна удовлетворять замкнутая кривая Γ, чтобы на ней была справедлива теорема Джексона-Бернштейна

$$\|f\|_{L_p(\Gamma,u)}=\|f\|_{L_p(\Gamma)}=\left(\int\limits_{\Gamma}|f(z)u(z)|^p|dz|\right)^{1/p}<\infty \quad (p\ge 1).$$

Пусть $K(0,a]$-множество положительных неубывающих функций, определенных на $(0,a]$ (a-произвольное положительное число) и $P(0,a]$-множество положительных невозрастающих функций на $(0,a]$. Через $K_0(0,a]$ обозначим множество тех функций $f\in K(0,a]$, для которых $f(t)\to 0$ при $t\to 0$.

Пусть функция $\varphi(\widetilde{\varphi})$ отображает внешность (внутренность) кривой Γ на внешность (внутренность) единичной окружности γ_0, а ψ $(\widetilde{\psi})$-функция, обратная к φ $(\widetilde{\varphi})$.

Полагая, что Γ является гладкой или кусочно-гладкой и $f\in L_p(\mu)$, введем в рассмотрение величины

$$u_p(\delta)=u_p(f,\delta)_\Gamma=\sup_{|h|\le\delta}\|f(z_h)-f(z)\|_{L_p(\Gamma)} \qquad (1)$$

и

$$\widetilde{u}_p(\delta)=\widetilde{u}_p(f,\delta)_\Gamma=\sup_{|h|\le\delta}\|f(\widetilde{z}_h)-f(z)\|_{L_p(\Gamma)}, \qquad (2)$$

где $z_h=\psi\left(\varphi(z)e^{ih}\right)$, $\widetilde{z}_h=\widetilde{\psi}\left(\widetilde{\varphi}(z)e^{ih}\right)$. Очевидно, что эти величины удовлетворяют всем свойствам модуля непрерывности:

1^0. $\widetilde{u}_p(\delta)$, $u_p(\delta)\in K_0(0,l]$, где l - длина кривой Γ;

2^0. Функции u_p и $\widetilde{u}_p$ полуадитивны, то есть

$u_p(\delta_1+\delta_2)\le u_p(\delta_1)+u_p(\delta_2)$ и $\widetilde{u}_p(\delta_1+\delta_2)\le\widetilde{u}_p(\delta_1)+\widetilde{u}_p(\delta_2)$ для $\delta_1,\delta_2\in(0,l]$;

3^0. u_p, $\widetilde{u}_p\in C[0,l]$, т.е. непрерывны на $[0,l]$.

В терминах этого обобщенного модуля непрерывности нетрудно показать, что величины вида (1) на кривых Γ, для которых $|\psi'(\omega)|\asymp 1$ или, более общее, $\psi(\omega)\in H'(\gamma)$ ($H'(\gamma)$-класс Гельдера), эквиваленты по порядку (при $\delta\to 0$) модулю непрерывности, введенному С.Я.Альпером

$$\omega^*{}_p(f,\delta)_\Gamma=\omega_p(f_0,\delta)=\sup_{|h|\le\delta}\left\|f_0\left(\omega e^{ih}\right)-f_0(\omega)\right\|_{L_p(\gamma_0)}, \qquad (3)$$

где $f_0(\omega)=f(\psi(\omega))$, а так же модулю непрерывности

$$\omega_p(\delta)=\omega_p(f,\delta)=\sup_{|h|\le\delta}\|f[z(s+h)-f(z(s))]\|_{L_p(\Gamma)}, \qquad (4)$$

где $z=z(s)$-параметрическое уравнение кривой Γ.

В случае, когда кривая Γ принадлежит более общему классу кривых, выполнения условия 2^0 для функции $u_p(\widetilde{u}_p)$ не всегда возможно, тогда как условие 1^0 выполняется. В связи с этим, введем в рассмотрение следующие регуляризованные интегральные модули непрерывности, конструкция построения которых принадлежит С.Б.Стечкину [6]:

$$\omega_p(\delta)=\omega_p(f,\delta)_\Gamma=\delta\sup_{t\ge\delta}t^{-1}u_p(f,t)_\Gamma \qquad (1')$$

и

$$\tilde\omega_p(\delta)=\tilde\omega_p(f,\delta)_\Gamma=\delta\sup_{t\ge\delta}t^{-1}\tilde u_p(f,t)_\Gamma\,. \qquad (2')$$

Для этих величин, очевидно, выполняются утверждения :

a) $u_p(\delta)\le\omega_p(\delta)$ и $\tilde u_p(\delta)\le\tilde\omega_p(\delta)$;

b) $\omega_p(\delta)\in K_0(0,l]$ и $\tilde\omega_p(\delta)\in K_0(0,l]$;

c) $\delta^{-1}\omega_p(\delta)\in P(0,l]$ и $\delta^{-1}\tilde\omega_p(\delta)\in P(0,l]$;

d) если $\delta^{-1}g(\delta)\in P(0,l]$ и $u_p(\delta)\le g(\delta)$ $(\tilde u_p(\delta)\le g(\delta))$, то $\omega_p(\delta)\le g(\delta)$ $(\tilde\omega_p(\delta)\le g(\delta))$;

e) если $u_p\ (\tilde u_p\ )$-полуадитивна, то $u_p(\delta)$ = $\omega_p(\delta)$ $(\tilde u_p(\delta)$ = $\tilde\omega_p(\delta))$.

Отметим, что утверждение d) показывает, что функция $\omega_p(\tilde\omega_p)$ является наилучшей мажорантой для $u_p\,(\tilde u_p\,)$ на всем классе функций $g(\delta)$, для которых $\delta^{-1}g(\delta)\in P(0,l]$.

Введем следующий регуляризованный интегральный модуль гладкости:

$$\omega_p^{(2)}(f,\delta)_\Gamma=\delta^2\sup_{t\ge\delta}t^{-2}u_p^{(2)}(f,t)_\Gamma\,, \qquad (5)$$

где

$$u_p^{(2)}(f,t)_\Gamma=\sup_{|h|\le t}\left\|f(z_h)+f(z_{-h})-2f(z)\right\|_{L_p(\Gamma)}, \qquad (5')$$

$$\tilde\omega_p^{(2)}(f,\delta)_\Gamma=\delta^2\sup_{t\ge\delta}t^{-2}\tilde u_p^{(2)}(f,t)_\Gamma\,, \qquad (6)$$

$$\tilde u_p(f,t)_\Gamma=\sup_{|h|\le\delta}\left\|f(\Xi_h)+f(\Xi_{-h})-2f(z)\right\|_{L_p(\Gamma)}. \qquad (6')$$

Нетрудно убедиться, что $\omega_p^{(2)}(f,\delta)$ и $\tilde\omega_p^{(2)}(f,\delta)$ удовлетворяют всем условиям модуля гладкости (т.е. $\omega(0)=0$, $\omega(\delta)\in C[0,l]$, $\omega(\delta)\uparrow$, $\omega(\lambda\delta)\le(1+\lambda)^2\omega(\delta)$ $\forall\lambda>0$) и являются наилучшими мажорантами, соответственно, для функций $u_p^{(2)}(f,\delta)_\Gamma$ и $\tilde u_p^{(2)}(f,\delta)_\Gamma$ среди всех функций типа модуля гладкости.

Заметим, что для приведенных обобщенных модулей гладкости имеют место также соотношения (см.[6]) :

$$\begin{aligned}&\omega_p^{(2)}(f,\delta)\le\delta^2(\delta+\eta)^2\,\omega_p^{(2)}(f,\delta)\quad\forall\delta>0,\ \forall\eta>0,\\&\tilde\omega_p^{(2)}(f,\eta)\le\delta^2(\delta+\eta)^2\,\tilde\omega_p^{(2)}(f,\delta)\quad\forall\delta>0,\ \forall\eta>0\end{aligned} \qquad (7)$$

и

$$\begin{aligned}&\eta^{-2}\omega_p^{(2)}(f,\eta)\le4\delta^{-2}\omega_p^{(2)}(f,\delta)\qquad\text{при}\qquad0<\delta<\eta\,,\\&\left(\eta^{-2}\tilde\omega_p^{(2)}(f,\eta)\le4\delta^{-2}\tilde\omega_p^{(2)}(f,\delta)\right)\qquad\text{при}\qquad0<\delta<\eta\,.\end{aligned} \qquad (8)$$

Обозначим через $M(G)$ класс функций, аналитических и ограниченных всюду в области G и ограниченных почти всюду (в линейном смысле) на ∂G.

Пусть $f \in M(G)$ и $F_h(z) = f(z_h) + f(z_{-h}) - 2f(z)$, где $h \in [0, \pi]$, $z_h = \psi\left(\varphi(z)e^{ih}\right)$ и

$$J\,F_h = (J\,F_h)_\Gamma(t) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{F_h(z)}{z-t}dz, \qquad t \in \Gamma. \tag{9}$$

Будем говорить, что жорданова спрямляемая кривая Γ принадлежит классу M (или $\Gamma \in M$), если для всякой $f \in M(\overline{G})$ интеграл (9) существует почти всюду на Γ и для каждого $p \geq 1$ имеет место оценка

$$\|J\,F_h\|_{L_p(\Gamma)} \leq C(p)\|F_h\|_{L_p(\Gamma)}, \quad \forall h \in [0, \pi], \tag{10}$$

где $C(p)-$ постоянная, зависящая лишь от указанного параметра p.

Отметим, что подобное определение класса кривых позволяет нам расширить класс кривых, рассмотренных в [7], а так же рассмотреть случай $p = 1$.

В дальнейшем нам понадобятся некоторые понятия и вспомогательные предложения.

Обозначим через D класс функций f, аналитических в круге $\{z \in \mathrm{C} : |z| < 1\}$, для которых выполняется условие $\lim\limits_{\rho \to 1}\int_0^{2\pi}\ln^+\left|f\left(\rho e^{i\theta}\right)\right|d\theta = \int_0^{2\pi}\ln^+\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right|d\theta < +\infty$,

где $\ln^+ a = \ln a$ при $a \geq 1$ и $\ln^+ a = 0$ при $a < 1$.

Лемма А [7]. Пусть $F\left(e^{i\theta}\right)$ совпадает почти всюду на окружности $|\omega| = 1$ с граничными значениями аналитической в круге $\{|\omega| < 1\}$ функции $F(\omega)$ класса D. Тогда найдется последовательность функций $\{F_k\left(e^{i\theta}\right)\}$, являющихся граничными значениями ограниченных аналитических в круге $\{|\omega| < 1\}$ функций $F_k(\omega)$, такая, что почти для всех $\theta \in (\theta, 2\pi)$:

$$\lim_{k\to\infty} F_k\left(e^{i\theta}\right) = F\left(e^{i\theta}\right), \ \left|F_k\left(e^{i\theta}\right)\right| \leq \left|F\left(e^{i\theta}\right)\right| \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Лемма Б [7]. Функция f принадлежит классу $E_p(G^+)$ (соответственно, $E_p(G^-)$) тогда и только тогда, когда $f(\tilde{\psi}(\omega))[\tilde{\psi}'(\omega)]^{1/p}$ (соответственно, $f(\psi(\omega))[\psi'(\omega)]^{1/p}$) входит в класс H_p $(p > 0)$ при $|z| < 1$ $(|z| > 1)$.

Лемма В [7]. Пусть Γ-замкнутая спрямляемая кривая Жордана, а f-функция, определенная почти всюду на Γ и измеримая. Если сингулярный интеграл

$$Sf = (Sf)_\Gamma(t) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-t}dz, \quad t \in \Gamma,$$

существует почти всюду на Γ, то интеграл типа Коши

$$\Phi(\xi)=\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-\xi}dz,\quad \xi\overline{\in}\Gamma,$$

имеет почти всюду на Γ определенные угловые значения, равные

$$\Phi^{\pm}(t)=\pm\frac{1}{2}f(t)+\frac{1}{2}Sf(t). \qquad (11)$$

Обратно, если интеграл типа Коши Φ имеет почти всюду на Γ угловые граничные значения изнутри или извне Γ, то почти всюду на Γ существует особый (сингулярный) интеграл Sf и граничные значения интеграла типа Коши Φ выражаются формулой (11).

Лемма Г [7]. Для представимости функции f интегралом Коши по своим граничным значениям, необходимо и достаточно, чтобы $f\in E_1(G)$ ($E_p(G)$– класс В.И.Смирнова).

Лемма 1. Если $f\in E_p(G)$ $(p>0)$ и $G\in S$ (S–класс областей В.И.Смирнова), то $f(\widetilde{\psi}(w))\in D$.

Доказательство. В силу леммы Б имеем $f(\widetilde{\psi}(w))[\widetilde{\psi}'(w)]^{1/p}=f_0(w)\in H_p$. По теореме П.Я.Полубардиновой-Кочиной (см.[7], стр.114) всякая функция, входящая в H_p $(p>0)$, содержится в классе D. Следовательно, $f_0\in D$. Далее, из $\widetilde{\psi}(w)\in H_1$ (см.[7], стр.173) вытекает $\widetilde{\psi}'(w)\in D$, откуда $[\widetilde{\psi}'(w)]^{-1/p}\in D$, что непосредственно следует из определения класса S. Поскольку произведение двух аналитических функций из D также принадлежит D, то $f(\widetilde{\psi}(w))=F(w)\in D$, так как функцию $f(\widetilde{\psi}(w))$ можно представить в виде произведения двух функций класса D, то есть $f(\widetilde{\psi}(w))=f_0(w)(\widetilde{\psi}'(w))^{-1/p}$.

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть $G\in S$, $f\in E_p(G)$ $(p>0)$ и $\{f(t);\, t\in\Gamma\}$-граничные значения функции $f(z)$, $z\in G$. Тогда найдется последовательность функций $\{\Phi_k(t)\}$, являющихся граничными значениями ограниченных аналитических в G функций $\Phi_k(z)$, такая, что почти для всех $t\in\Gamma$ $\lim\limits_{k\to\infty}\Phi_k(t)=f(t)$ и $|\Phi_k(t)|\le|f(t)|$ $(k=1,2,\ldots)$.

Доказательство. Поскольку $G\in S$ и $f\in E_p(G)$, то в силу леммы 1 $f(\widetilde{\psi}(w))=F(w)\in D$. Отсюда, в силу леммы А, мы можем утверждать, что существует последовательность функций $\{F_k(e^{i\theta})\}$, являющихся граничными значениями ограниченных аналитических в круге $\{|w|\le 1\}$ функций $F_k(w)$, такая, что почти для всех θ $(0<\theta<2\pi)$, имеем: $\lim\limits_{k\to\infty}F_k(e^{i\theta})=F(e^{i\theta})$, $|F_k(e^{i\theta})|\le|F(e^{i\theta})|$ $(k=1,2,\ldots)$.

Теперь, определив $\Phi_k(z)=F_k(\varphi(z))=F_k(w)$ и $\Phi_k(t)-F_k(\widetilde{\varphi}(t))=F_k(e^{i\theta})$ $(w=\widetilde{\varphi}(z))$, получим: $\lim\limits_{k\to\infty}\Phi_k(t)=f(t)$, $|\Phi_k(t)|\le|f(t)|$ $(k=1,2,\ldots)$.

Заметим, что функции $\Phi_k(z)=F_k(\widetilde{\varphi}(z))$ являются ограниченными аналитическими функциями в G, так как $\widetilde{\varphi}$ является ограниченной аналитической в G функцией. Лемма доказана.

Справедлива следующая

Теорема 1. При условиях леммы 2 существует последовательность функций $\{\Phi_k^*\}$, такая, что:

a) $\lim\limits_{k\to\infty}\int\limits_{\Gamma}\left|f(t)-\Phi_k^*(t)\right|^p|dz|=0$;

b) Функции Φ_k^* ограничены на Γ и совпадают почти всюду на Γ с граничными значениями ограниченных в G аналитических функций;

c) $\lim\limits_{k\to\infty}\int\limits_{\Gamma}\left|f(t_{\pm h})-\Phi_k^*(t_{\pm h})\right|^p|dt|=0$, где $t_{\pm h}\in\Gamma$ $\left(t_{\pm h}=\psi\left(\varphi(t)e^{\pm ih}\right)\right)$, а функции ψ и φ конформно отображают внешность (и внутренность) единичной окружности на $G^+\left(G^-\right)$ и наоборот;

d) $\lim\limits_{k\to\infty}u_p^{*(2)}\left(\Phi_k^*,h\right)=u_p^{*(2)}(f,h)_\Gamma$, $\left(\lim\limits_{k\to\infty}\widetilde{u}_p^{*(2)}\left(\Phi_k^*,h\right)=u_p^{*(2)}(f,h)_\Gamma\right.$,

где $u_p^{*(2)}(g,h)=\left\|g(t_n)+g(t_{-n})-2g(t)\right\|_{L_p(\Gamma)}$.

Доказательство. В силу леммы 2, для функции $f(t)$ найдется последовательность функций $\{\Phi_k(t)\}$, являющихся граничными значениями ограниченных аналитических в G функций $\Phi_k(z)$, причём почти для всех $t\in\Gamma$ имеем: $\lim\limits_{k\to\infty}\Phi_k(t)=f(t)$, $\left|\Phi_k(t)\right|\le|f(t)|$.

Функции $\Phi_k(t)$, как граничные значения ограниченных в G функций, являются ограниченными почти для всех $t\in\Gamma$.

Заметим, что в случае необходимости, изменяя значения функции $\Phi_k(t)$ на множествах меры нуль, можно получить последовательность функций $\left\{\Phi_k^*(t)\right\}$, сходящуюся к $f(t)$ уже при всех $t\in\Gamma$. Причем для всех $t\in\Gamma$ выполняются неравенства

$$\Phi_k^*(t)\le C_k,\quad \left|\Phi_k^*(t)\right|\le|f(t)|\quad (k=1,2,\dots). \tag{12}$$

Действительно, из отмеченных выше свойств функции $\Phi_k(t)$ вытекает, что на Γ существует множество E полной линейной меры, такое, что в каждой точке множества E последовательность $\{\Phi_k(t)\}$ сходится и при всяком $t\in E$

$$\Phi_k(t)\le C_k,\quad \left|\Phi_k(t)\right|\le|f(t)|\quad (k=1,2,\dots).$$

Определим функции $\Phi_k^*(t)$ следующим образом:

$\Phi_k^*(t)=\Phi_k(t)$ при $t\in E$,

$$\Phi_k^*(t) = f(t) \text{ при } t \overline{\in} E \quad (t \in \Gamma) \text{ и } |f(t)| \le C_k,$$

$$\Phi_k^*(t) = 0 \text{ при } t \overline{\in} E \quad (t \overline{\in} \Gamma) \text{ и } |f(t)| > C_k.$$

При этом, если функция $f(t)$ определена не для всех $t \in \Gamma$, то мы доопределим ее нулем в тех точках, в которых она не определена.

Заметим, что определенная, таким образом, последовательность $\{\Phi_k^*(t)\}$ удовлетворяет свойствам, указанным в (12). Покажем, что для этой последовательности выполняется a). Для этой цели заметим, что к последовательности $\{\Phi_k^*(t)\}$, сходящейся к функции $f(t)$, можно применить теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, так как $\{\Phi_k^*(t)\} \le |f(t)|$, $\lim\limits_{k\to\infty} \Phi_k^*(t) = f(t)$ $\forall t \in \Gamma$, а функция $f(t)$, по условию, такова, что $\int\limits_\Gamma |f(t)|^p |dt| < +\infty$. Поэтому $\lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_\Gamma \left| f(t) - \Phi_k^*(t) \right| |dt| = 0$. Далее, выполнение в) очевидно. Теперь докажем c). Мы показали, что при всяком $t \in \Gamma$ $\left|\Phi_k^*(t)\right| \le C_k$, и $\left|\Phi_k^*(t)\right| \le |f(t)|$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Значит, и при всяком $t_{\pm h} \in \Gamma$ имеют место неравенства:

$$\Phi_k^*(t_{\pm h}) \le C_k^{*\pm} \text{ и } \left|\Phi_k^*(t_{\pm h})\right| \le |f(t_{\pm h})|. \tag{13}$$

Кроме того, мы показали, что последовательность $\{\Phi_k(t)\}$ при всяком $t \in \Gamma$ сходится к функции $f(t)$. Очевидно, что тогда последовательность $\{\Phi_k^*(t_{\pm h})\}$ при всяком $t_{\pm h} \in \Gamma$ сходится к $f(t_{\pm h})$. Так же, как и при доказательстве соотношения a), к последовательности $\{\Phi_k^*(t_{\pm h})\}$, сходящейся к функции $f(t_{\pm h})$, можно применить теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, так как при всяком $t_{\pm h} \in \Gamma$:

$$\left|\Phi_k^*(t_{\pm h})\right| \le C_k^{\pm}, \; \left|\Phi_k^*(t_{\pm h})\right| \le |f(t_{\pm h})|, \qquad \lim_{k\to\infty} \Phi_k^*(t_{\pm h}) = f(t_{\pm h}) \text{ и } f(t_{\pm h}) \in L_p(\Gamma).$$

Поэтому $\lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_\Gamma \left| f(t_{\pm h}) - \Phi_k^*(t_{\pm h}) \right|^p |dt| = 0$.

Докажем теперь, справедливость соотношения d). В силу выше доказанного утверждения и теоремы Лебега, имеем:

$$\left\|\Phi_k^*(t_h) + \Phi_k^*(t_{-h}) - 2\Phi_k^*(t)\right\|_{L_p(\Gamma)} \le \left\|\Phi_k^*(t_h) - f(t_h)\right\|_{L_p(\Gamma)} + 2\left\|\Phi_k^*(t) - f(t)\right\|_{L_p(\Gamma)} +$$
$$+ \left\|\Phi_k^*(t_{-h}) - f(t_{-h})\right\|_{L_p(\Gamma)} + \left\|f(t_h) - 2f(t) + f(t_{-h})\right\|_{L_p(\Gamma)},$$

откуда следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \left\|\Phi_k^*(t_h) - 2\Phi_k^*(t) + \Phi_k^*(t_{-h})\right\|_{L_p(\Gamma)} \le \left\|f(t_h) - 2f(t) + f(t_{-h})\right\|_{L_p(\Gamma)}. \tag{14}$$

Аналогично доказывается и соотношение

$$\left\|f(t_h) - 2f(t) + f(t_{-h})\right\|_{L_p(\Gamma)} \le \lim_{k\to\infty} \left\|\Phi_k^*(t_h) - 2\Phi_k^*(t) + \Phi_k^*(t_{-h})\right\|_{L_p(\Gamma)}. \tag{15}$$

Из (14) и (15) следует соотношение d). Теорема 1 доказана.

Обозначим через $E_p^*(G)$ $(p \geq 1)$ класс функций $f \in E_p(G)$ с конечным регуляри-зованным модулем гладкости $\omega_p^{(2)}(\delta) = \omega_p^{(2)}(f, \delta)_\Gamma$, определенным со-отношением (4).

Имеет место следующая

Теорема 2. Если область $G \in M$ и $f \in E_p^*(G)$ $(p \geq 1)$, то при каждом натуральном n существует многочлен P_n такой, что

$$\|f - P_n\|_{L_p(\Gamma)} \leq const\, \omega_p^{(2)}\left(f, \frac{1}{n}\right)_\Gamma .$$

Доказательство теоремы 2 предполагается изложить в следующей работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Уолш Дж. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. М.: ИЛ, 1961.
2. Альпер С.Я. О равномерных приближениях функций комплексного переменного в замкнутой области. Изв. АН СССР, Сер. матем., т.19, № 3, 1955, 423-444.
3. Мергелян С.Н. Равномерное приближение функций комплексной переменного. Успехи матем. наук, 7:2 (48), 1952, с.31-122.
4. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. М.: «Наука», т.I (1967), т.II(1968).
5. Мамедханов Дж.И. Вопросы наилучшей полиномиальной аппроксимации в комплексной плоскости. В сб. «Теория функций и приближений», Саратов, 1983, с.149-156.
6. Стечкин С.Б. О порядке наилучших приближений непрерывных функций. Изв.АН СССР, Сер.мат., т.15, № 3, 1951, с.219-242.
7. Привалов И.И. Граничные свойства однозначных аналитических функций. М. «Наука», 1950.

KOMPLEKS MÜSTƏVİDƏ QAPALI ƏYRİLƏR ÜZRƏ CEKSON-BERNŞTEYN TEOREMİNİN L_p-ANALOQU

C.İ.MƏMMƏDXANOV, İ.B.DADAŞOVA

XÜLASƏ

L_p-də Cekson teoreminin ümumi analoqu kompleks müstəvinin qapalı əyriləri üzərində alınmışdır. İsbatlarda $E_p(G)$ funksiyalar siniflərinin polinomial approksimasiyası və eləcə də bu siniflərin məhdud analitik funksiyalar vasitəsilə approksimasiyasından istifadə olunur. Alınmış nəticələr funksiyalar nəzəriyyəsinin müəyyən sahələrində tətbiqlərə malik olmaqla yanaşı, müstəqil maraq da kəsb edirlər.

ANALOGUE OF THE THEOREM OF JACKSON - BERNSTEIN IN L_p ON THE CLOSED CURVES IN A COMPLEX PLANE

J.I.MAMEDKHANOV, D.I.DADASHOVA

SUMMARY

It is received common analogue of Jackson's direct theorem in L_p on the closed curves in a complex plane. In the proof is used polynomial approximation of functions of classes $E_p(G)$, and also approximation of these classes per of the analytical bounded functions. The received results alongside with applications in adjacent areas of theory of functions, represent also independent interest.